$A_1 \to$ Σελ. 135 Σχολ.

$A_2 \to$ Σελ. 51 Σχολ

$A_3 \to$ Σελ 23 Σχολ.

$A_4 \to$ Σ
Λ
Σ
Σ
Σ.

B_1 Θέτω $u = x+1 \to x = u-1$.

Επομ. $f(u) = u e^{-(u-1)} = u e^{1-u}$.

Άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

B_2. Η f παρ. στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

max στο $x=1$
το $f(1) = e^0 = 1$.

$f \uparrow$ στο $(-\infty, 1]$, $f \downarrow$ στο $[1, +\infty)$.

B3

$$f''(x) = -e^{1-x}\cdot(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(x-2).$$

x		2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Σ. καμπής για $x=2$ το $f(2)=\frac{2}{e}$

·) Δεν έχει κατακόρυφες.

·) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$.

Δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

·) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0 = \lambda$.

·) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-0) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$

Άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμ. στο $+\infty$.

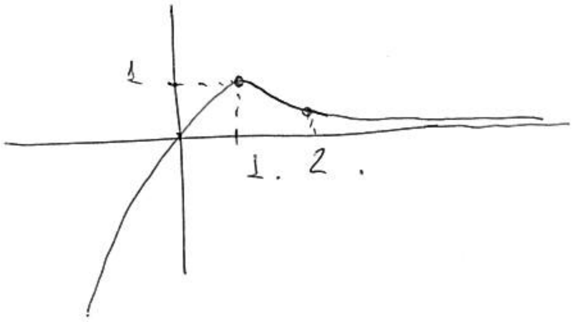
B4

Δ_1: $f \uparrow$ στο $(-\infty, 1]$ με $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$.

Δ_2: $f \downarrow$ στο $[1, +\infty)$ με $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0, 1]$

Άρα $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1] \cup (0, 1] = (-\infty, 1]$.

(B4) ΣΥΝΕΧΗΑ.



·) Αν $\lambda > 1$ ΑΔΥΝΑΤΗ

Αν $\lambda = 1$ ΜΙΑ ΛΥΣΗ.

Αν $0 < \lambda < 1$ ΔΥΟ ΛΥΣΗΣ.

Αν $\lambda \leq 0$ ΜΙΑ ΛΥΣΗ.

(Γ1) Για $x<0$ συνεχής ως πολυων.

Για $\frac{3\pi}{2} \geq x > 0$ συνεχής ως τριγων.

· $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1.$

· $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax^3-3x^2-x+1) = 1$

$f(0) = 1.$

Αρα συνεχής και στο $x_0=0$

οποτε συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

·) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

·) $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^-} (3ax^2-6x-1) = -1$

Αρα δεν είναι παραγ. στο 0.

Γ2 Η f συνεχής $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

παραγωγ. $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

i) και $f(0) = 1$.

και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0$.

Άρα $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ Δεν ισχύει ο Rolle.

ii) Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Άρα $f'(x) = -\eta\mu x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0$

$\eta\mu x = 0$

$\boxed{x = \pi}$

Άρα $\xi = \pi$.

Γ3 Για $x<0$ $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$.

$\Delta = (-6)^2 - 4(3a)\cdot(-1) =$

$= 36 + 12a = 12(3+a) < 0$.

Άρα $f'(x) < 0$

Επομένως δεν υπάρχουν σημεία

για οποία $f'(x) = 0$.

Γ4. Για $x \in (-\infty, 0]$ $f(x) = ax^3 - 3x^2 - x + 1$.

και $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0$

Άρα $f(x) \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$.

Οπότε για $x \le 0$

$f(x) \ge f(0)$

$\boxed{f(x) \ge -1}$

• Για $x \in (0, \frac{3\pi}{2}]$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \ge -1$.

Άρα $\boxed{f(x) \ge -1}$

Δ1. $\ln x - \frac{1}{x} = 0$

Θεωρώ $B(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ / $[1, e]$.

$B(1) = -1 < 0$

$B(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$

Άρα από Bolzano $\exists$ τουλ. ένα $x_0 \in (1, e)$.

Αλλά $B'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

Άρα $B(x) \uparrow$ στο $[1, e]$, επομένως

το x_0 είναι μοναδικό.

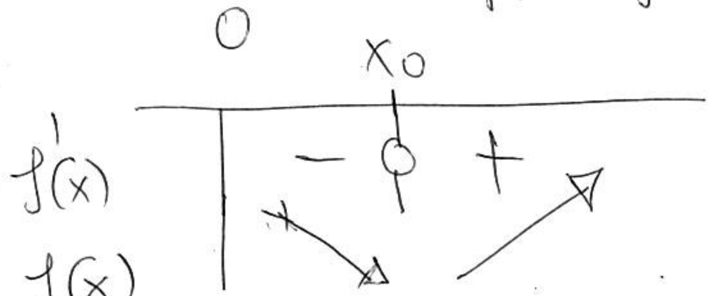
Δ_2 $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$, $x>0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$.

και $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, $f'(x) \nearrow$

Άρα για $x > x_0$
$f'(x) > f'(x_0) \rightarrow f'(x) > 0$.

$x < x_0$
$f'(x) < f'(x_0) \longrightarrow f'(x) < 0$



ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0) = \dots = 0$.

Άρα $f(x) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει <u>ΜΟΝΟ</u> για $x = x_0$.

Δ_3 $g(x) = h(x) \Leftrightarrow$

$x e^{-x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow$

$e x = x_0^{x+1} \Leftrightarrow$

$\ln e + \ln x = (x+1)\cdot \ln x_0 \Leftrightarrow$

$0 = (x+1)\cdot \ln x_0 - \ln x - 1$

$f(x) = 0$, Μοναδική ρίζα το x_0

Δ3 συνέχεια

και $g'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow$

$$e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = x_0 e^{-x_0} \cdot (\ln x_0 - 1)$$

$$e^{-x_0} = x_0 e^{-x_0} \cdot \ln x_0$$

$$1 = x_0 \ln x_0$$

$\frac{1}{x_0} = \ln x_0$ ισχύει.

Δ4 Η φ συνεχής στο x_0.

•) Αν η φ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ στο x_0

Τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.

•) Αν η φ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ στο x_0.

Τότε η $g(x) = f(x) - \varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 (διαφορά παραγωγ.)

και παρουσιάζει min για $x = x_0$,

Άρα $g'(x_0) = 0$

Δηλαδή $\cancel{f'(x_0)} - \varphi'(x_0) = 0$ Άρα $\varphi'(x_0) = 0$

Επομένως κρ. σημείο.